消散性非線型項を持つ Schrodinger 方程式の解の時間減衰と長時間挙動について(スペクトル・散乱理論とその周辺)

下村, 明洋

数理解析研究所講究録
第 1563 巻 2007 年 33-42

消散性非線型項を持つSchrödinger方程式の解の時間減衰と長時間挙動について

学習院大学・理学部　下村 明洋 (Akihiro SHIMOMURA)
Department of Mathematics, Faculty of Science
Gakushuin University

1 序

本稿は [9] に基づく．非線型 Schrödinger 方程式の初期値問題

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda |u|^{2/n} u, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.2}$$

の解の時間減衰と長時間挙動を考える．ここで，n は空間次元で $n = 1, 2$ 又は 3，$\partial_t = \partial/\partial t$, $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial^2/\partial x_j^2$，$\lambda$ は

$$\operatorname{Im} \lambda < 0 \tag{1.3}$$

を満たす複素定数，$u_0 = u_0(x)$ は与えられた初期データで $\mathbb{R}^n$ 上の複素数値函数，$u = u(t,x)$ は $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ 上の複素数値未知函数である．

方程式 (1.1) の非線型項 $\lambda |u|^{2/n} u$ は，$t \to \infty$ の時に非線型性の寄与が無視不可能となる (臨界の) 冪 $1 + 2/n$ である．(非線型項 $|u|^{p-1}u$ については，$p > 1 + 2/n$ ならば非線型項の影響は無視可能，$1 < p \le 1 + 2/n$ ならばその寄与は無視不可能である事が知られている.) つまり，この非線型項は長距離型相互作用で，方程式 (1.1) の解は $t \to \infty$ の時に自由 Schrödinger 方程式

$$i\partial_t v + \frac{1}{2}\Delta v = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \tag{1.4}$$

の解 (これを自由解と呼ぶ) の様に振舞う事は期待出来ない．(例えば, Barab [1] を参照.) λ が実数の場合は，方程式 (1.1) の解の長時間挙動の研究は，Ozawa [8] と Ginibre-Ozawa [3] によって修正波動作用素の存在が証明され，Hayashi-Naumkin [5] により小さい初期値に対する初期値問題の解の時間減衰と漸近挙動が得られている．彼らの結果によると，λ が実数の場合は，方程式 (1.1) の解の時刻無限大に於ける漸近形は，自由解の位相部分を然るべく修正 (変調) したものである．(この場合の関連する文献として，更に，Carles [2], Ginibre-Velo [4], Hayashi-Naumkin [6], Lindblad-Soffer [7] を挙げておく.)

複素係数 λ が条件 (1.3) を満たす時，非線型項 $\lambda|u|^{2/n}u$ は消散性を持つ．何故ならば，u を方程式 (1.1) の非自明な解とすると，方程式 (1.1) と条件 (1.3) より，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L_x^2}^2 =& 2\,\mathrm{Re}\langle\partial_t u(t), u(t)\rangle\\ =&2(\mathrm{Im}\,\lambda)\langle|u(t)|^{2/n}u(t), u(t)\rangle\\ =&2(\mathrm{Im}\,\lambda)\|u(t)\|_{L_x^{2+2/n}}^{2+2/n}\\ <&0\end{aligned}$$

であり，$\|u(t)\|_{L_x^2}$ が減少するからである．(ここで，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は L^2 に於ける内積である.) 一方，λ が実数の時は，$\|u(t)\|_{L_x^2}$ は保存され減少しない．従って，条件 (1.3) が成り立つ時は (λ が実数の場合と比べて) 非線型項 $\lambda|u|^{2/n}u$ は (1.1) の解を減衰させる効果がある様に推測出来る．以上より，方程式 (1.1) は解を減衰させる効果のある非線型項を持ち，時刻無限大での挙動にその寄与が現れると考えられる．

以下で用いる幾つかの記法・函数空間を定義する．$\psi \in \mathcal{S}'$ に対して，ψ の Fourier 変換を $\hat{\psi}$ 又は $\mathcal{F}\psi$ と表す．$\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して，$\hat{\psi}$ は次の様に表される:

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)e^{-ix\cdot\xi}\,dx.$$

$m, s \in \mathbb{R}$ に対して，重み付き Sobolev 空間 $H^{m,s}$ を次の様に定義する:

$$H^{m,s} = \{\psi \in \mathcal{S}' : \|\psi\|_{H^{m,s}} \equiv \|(1+|x|^2)^{s/2}(1-\Delta)^{m/2}\psi\|_{L^2} < \infty\}.$$

$k \in \mathbb{R}$ に対して，

$$H^k = H^{k,0}, \quad \|\psi\|_{H^k} = \|\psi\|_{H^{k,0}}$$

とする．(即ち，H^k は L^2 に関する k 階の Sobolev 空間である.)

実数 t に対して，

$$U(t) \equiv e^{it\Delta/2} = \mathcal{F}^{-1} e^{-it|\xi|^2/2} \mathcal{F}$$

とする．初期条件 $v(0,x) = \phi(x)$ を満たす自由 Schrödinger 方程式 (1.4) の解は，$v(t,x) = (U(t)\phi)(x)$ で与えられる．作用素 $U(t)$ は次の様に表す事が出来る:

$$U(t) = M(t)D(t)\mathcal{F}M(t), \quad t \neq 0. \tag{1.5}$$

ここで，作用素 $M(t)$ と $D(t)$ は

$$(M(t)\psi)(x) = e^{i|x|^2/2t}\psi(x), \quad (D(t)\psi)(x) = \frac{1}{(it)^{n/2}}\psi\left(\frac{x}{t}\right)$$

である．自由解の評価について次が知られている:

$$\|U(t)\phi\|_{L^2_x(\mathbb{R}^n)} = \|\phi\|_{L^2_x(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.6}$$

$$\|U(t)\phi\|_{L^\infty_x(\mathbb{R}^n)} \leq C|t|^{-n/2}\|\phi\|_{L^1_x(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.7}$$

2 主結果

本稿の主結果は以下の通りで，それらは [9] で得られたものである．

先ず，分散性時間大域解の一意存在についての命題を述べる．

命題 2.1 ([9]). 空間次元 n は $n \leq 3$ とし，複素定数 λ は条件 (1.3) を満たすとする．m を $n/2 < m < 1 + 2/n$ を満たす定数とし，δ を $0 < (1+2/n)\delta < (1/2)(m - n/2)$ を満たす定数とする．この時，$0 < \varepsilon_0 \leq 1$ なる数 ε_0 と $N > 0$ が存在して，次が成り立つ．$u_0 \in H^m \cap H^{0,m}$ かつ

$$\|u_0\|_{H^m \cap H^{0,m}} \leq \varepsilon_0$$

ならば，初期値問題 (1.1)–(1.2) の解 u で以下を満たすものが唯一つ存在する:

$$u \in C([0,\infty); H^m), \quad U(-t)u \in C([0,\infty); H^{0,m}),$$

$$\|u(t)\|_{H^m} + \|U(-t)u(t)\|_{H^{0,m}} \leq N\varepsilon(1+t)^\delta,$$

$$\|\mathcal{F}U(-t)u(t)\|_{L^\infty_\xi} \leq N\varepsilon.$$

ここで，$\varepsilon = \|u_0\|_{H^m \cap H^{0,m}}$ である．

以下では，命題 2.1 で得られた大域解の時間減衰と長時間挙動について考える．

定理 2.1 **([9])**. 命題 2.1 の仮定が満たされているとする．$\|u_0\|_{H^m \cap H^{0,m}} \le \varepsilon_0$ が成り立つとし，u を命題 2.1 で得られた，初期値問題 (1.1)–(1.2) の大域解とする．ここで，ε_0 は命題 2.1 で現れる正数である．この時，$0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$ を満たす定数 ε_1 が存在して，以下が成り立つ．$\|u_0\|_{H^m \cap H^{0,m}} \le \varepsilon_1$ ならば，$w_+ \in L_x^2 \cap L_x^\infty$ が唯一つ存在して，次が成立する:

$$\left\| \exp\left(i\lambda \int_1^t s^{-1} |\hat{u}(s)|^{2/n}\, ds \right) \mathcal{F}U(-t)u(t) - w_+ \right\|_{L_x^2 \cap L_x^\infty} \le C\varepsilon t^{-\beta}.$$

ここで，$\varepsilon = \|u_0\|_{H^m \cap H^{0,m}}$ で，β は n, m と δ に依存し $0 < \beta < 1/2$ を満たす或る定数である．

次に，定理 2.1 の評価式で現れる修正因子 $\exp\left(i\lambda \int_1^t s^{-1} |\hat{u}(s)|^{2/n}\, ds \right)$ の挙動を調べ，u の振舞いを調べる．

定理 2.2 **([9])**. 定理 2.1 の仮定が成り立っているとする．$\|u_0\|_{H^m \cap H^{0,m}} \le \varepsilon_1$ とし，u を命題 2.1 で得られた，初期値問題 (1.1)–(1.2) の大域解とする．ここで，ε_1 は定理 2.1 で現れる正数である．$w_+ \in L^2 \cap L^\infty$ は定理 2.1 で得られた函数とする．この時，$0 < \varepsilon_2 \le \varepsilon_1$ を満たす数 ε_2 が存在して，$\|u_0\|_{H^m \cap H^{0,m}} \le \varepsilon_2$ の時に以下が成立する．

- $\psi_+ \in L^\infty$ が唯一つ存在して，

$$\left\| \exp\left(|\lambda_2| \int_1^t s^{-1} |\hat{u}(s)|^{2/n}\, ds \right) - (K(t) + \psi_+)^{n/2} \right\|_{L_x^\infty} = O(t^{-k_1}) \qquad (2.1)$$

  が成り立つ．ここで，$k_1 > 0$ は n, m, δ による或る定数で，

$$K(t,x) = 1 + \frac{2|\lambda_2|}{n} |w_+(x)|^{2/n} \log t$$

  である．更に，$\|\psi_+\|_{L^\infty} \le 1/2$ が成り立つ．

- $\phi_+ \in L^\infty$ が唯一つ存在して，

$$\left\| \exp\left(i\lambda_1 \int_1^t s^{-1} |\hat{u}(s)|^{2/n}\, ds \right) - e^{iS(t) + i\phi_+} \right\|_{L_x^\infty} = O(t^{-k_2}) \qquad (2.2)$$

が成り立つ．ここで，$k_2 > 0$ は n, m, δ による或る定数で，

$$
\begin{aligned}
S(t,x) =&\lambda_1 |w_+(x)|^{2/n} \int_1^t \frac{1}{s(K(s,x)+\psi_+(x))}\, ds \\
=&\frac{n\lambda_1}{2|\lambda_2|} \log\left(1 + \frac{2|\lambda_2|}{n} \frac{|w_+(x)|^{2/n}}{1+\psi_+(x)} \log t\right)
\end{aligned}
$$

である．

- 次の漸近公式が成り立つ:

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{F}U(-t)u(t) - e^{-iS(t)-i\phi_+}(K(t)+\psi_+)^{-n/2} w_+\|_{L^2_x \cap L^\infty_x} \\
&\qquad = O(t^{-\kappa}). \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

ここで，$\kappa > 0$ は n, m, δ による或る定数である．

- 次の時間減衰評価が成り立つ:

$$
\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{L^2_x} = 0, \qquad (2.4)
$$

$$
\|u(t)\|_{L^\infty_x} = O((t\log t)^{-n/2}). \qquad (2.5)
$$

注意 2.1. $w_+ \in L^2 \cap L^\infty$, $\psi_+ \in L^\infty$ と $\phi_+ \in L^\infty$ は定理 2.1 と定理 2.2 で得られた函数とし，

$$
u_+ = \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{w_+ e^{-i\phi_+}}{(1+\psi_+)^{n/2}} \right\}
$$

とおく．この時，$\hat{u}_+ \in L^2 \cap L^\infty$ であり，漸近公式 (2.3) は次の様に書き換えられる:

$$
\left\| \mathcal{F}U(-t)u(t) - e^{-i\widetilde{S}(t,\cdot)} \widetilde{A}(t,\cdot)^{-n/2} \hat{u}_+ \right\|_{L^2_x \cap L^\infty_x} = O(t^{-\kappa}). \qquad (2.6)
$$

ここで，

$$
\widetilde{S}(t,\xi) = \frac{n\lambda_1}{2|\lambda_2|} \log\left(1 + \frac{2|\lambda_2|}{n} |\hat{u}_+(\xi)|^{2/n} \log t\right),
$$

$$
\widetilde{A}(t,\xi) = 1 + \frac{2|\lambda_2|}{n} |\hat{u}_+(\xi)|^{2/n} \log t
$$

である．漸近公式 (2.6) より，特に，L^2 に於いては，

$$
\left\| u(t) - U(t) e^{-i\widetilde{S}(t,-i\nabla)} \widetilde{A}(t,-i\nabla)^{-n/2} u_+ \right\|_{L^2_x} = O(t^{-\kappa})
$$

が得られる．

注意 2.2. (1.6)–(1.7) と (2.4)–(2.5) によると，λ に対する条件 (1.3) が成り立つ場合，(1.1) の解 u は自由解より速く減衰している事が分かる．

3 証明の概略

この節では，定理 2.1 と定理 2.2 の証明の方針を述べる．本稿では定理の正確な証明は与えない．詳しい証明については，原論文 [9] を参照のこと．

先ず，命題 2.1 は，初期値問題 (1.1)–(1.2) の時間局所可解性と，解の (小さい初期データに対する) 先験的評価によって証明される．

定理 2.1 の証明方法は以下の通りである．

定理 2.1 の証明の概略．方程式 (1.1) の両辺に $\mathcal{F}U(-t)$ を作用させると，

$$i\partial_t \mathcal{F}U(-t)u = \lambda \mathcal{F}U(-t)(|u|^{2/n}u)$$

が得られ，発展作用素 $U(\cdot)$ の分解 (1.5) と非線型項のゲージ不変性から，

$$i\partial_t \mathcal{F}U(-t)u = \frac{\lambda}{t}|\mathcal{F}U(-t)u|^{\frac{2}{n}}\mathcal{F}U(-t)u + R \tag{3.1}$$

かつ

$$\|R(t)\|_{L^2_x \cap L^\infty_x} \le C\varepsilon t^{-1-k} \tag{3.2}$$

が分かる．ここで，

$$R = \lambda \mathcal{F}U(-t)(|u|^{2/n}u) - \frac{\lambda}{t}|\mathcal{F}U(-t)u|^{2/n}\mathcal{F}U(-t)u$$

で，$k > 0$ は或る定数である．非線型項の長距離型作用は，等式 (3.1) の右辺第 1 項に現れ，これを吸収させる為に次の函数

$$\Phi(t) = \lambda_1 \int_1^t \frac{1}{s}|\mathcal{F}U(-s)u(s)|^{2/n}\,ds = \lambda_1 \int_1^t \frac{1}{s}|\hat{u}(s)|^{2/n}\,ds,$$
$$\Psi(t) = |\lambda_2| \int_1^t \frac{1}{s}|\mathcal{F}U(-s)u(s)|^{2/n}\,ds = |\lambda_2| \int_1^t \frac{1}{s}|\hat{u}(s)|^{2/n}\,ds$$

を導入し，

$$w = e^{i\Phi + \Psi}\mathcal{F}U(-t)u$$

とおく．(ここで，$|\mathcal{F}U(-t)u(t)| = |\hat{u}(t)|$ に注意した.) 等式 (3.1) より，

$$i\partial_t w = e^{i\Phi+\Psi}R. \tag{3.3}$$

が得られる．$\{w(t)\}$ が $t\to\infty$ の時に $L^2\cap L^\infty$ に於いて Cauchy 条件を満たす事を証明する．$1<t<s$ とする．方程式 (3.3) の両辺を t から s まで積分して,

$$w(s)-w(t)=-i\int_t^s e^{i\Phi(\tau)+\Psi(\tau)}R(\tau)\,d\tau$$

が得られる．命題 2.1 より,

$$\begin{aligned}\|e^{\Psi(\tau)}\|_{L^\infty_x}\leq&\exp\left(|\lambda_2|\int_1^\tau\frac{1}{\tau'}\||\mathcal{F}U(-\tau')u(\tau')|^{2/n}\|_{L^\infty_x}\,d\tau'\right)\\ \leq&\exp(C'\varepsilon^{2/n}\log\tau)=\tau^{C'\varepsilon^{\frac{2}{n}}}\end{aligned}$$

が成り立つ．これと評価式 (3.2) より，$\varepsilon=\|u_0\|_{H^m\cap H^{0,m}}$ が十分小さければ,

$$\begin{aligned}\|w(s)-w(t)\|_{L^2_x\cap L^\infty_x}\leq&C\int_t^s\|e^{\Psi(\tau)}\|_{L^\infty_x}\|R(\tau)\|_{L^2_x\cap L^\infty_x}\,d\tau\\ \leq&C\varepsilon\int_t^s\tau^{-1-k+C'\varepsilon^{\frac{2}{n}}}\,d\tau\\ \leq&C\varepsilon t^{-k/2}\end{aligned}\tag{3.4}$$

が成り立つ．従って，$\{w(t)\}$ が $L^2\cap L^\infty$ に於いて Cauchy 条件を満たし，$L^2\cap L^\infty$ に於ける極限値 $w_+\equiv\lim_{t\to\infty}w(t)$ が存在する．不等式 (3.4) より，定理 2.1 が従う． □

次に，定理 2.2 の証明方針を述べる．

定理 2.2 の証明の概略．先ず，$e^{\Psi(t)}$ の挙動を調べて (2.1) を示す．Ψ と w の定義から,

$$\begin{aligned}\partial_t\Psi(t)=&|\lambda_2|t^{-1}|\mathcal{F}U(-t)u(t)|^{\frac{2}{n}}\\ =&|\lambda_2|t^{-1}|w(t)|^{\frac{2}{n}}e^{\frac{2}{n}\Psi(t)}\end{aligned}$$

が従う．$\Psi(1)=0$ である事に注意すると,

$$e^{\frac{2}{n}\Psi(t)}=1+\frac{2|\lambda_2|}{n}\int_1^t s^{-1}|w(s)|^{\frac{2}{n}}\,ds$$

が得られる．$\{e^{\frac{2}{n}\Psi(t)}-K(t)\}_{t\geq1}$ が $t\to\infty$ の時に L^∞ に於いて Cauchy 条件を満たす事を示す．$1\leq t<s$ とする．K の定義から,

$$(e^{\frac{2}{n}\Psi(s)}-K(s))-(e^{\frac{2}{n}\Psi(t)}-K(t))=\frac{2|\lambda_2|}{n}\int_t^s\tau^{-1}(|w(\tau)|^{\frac{2}{n}}-|w_+|^{\frac{2}{n}})\,d\tau$$

が成り立ち，

$$
\begin{aligned}
&\|(e^{\frac{2}{n}\Psi(s)} - K(s)) - (e^{\frac{2}{n}\Psi(t)} - K(t))\|_{L^\infty_x} \\
\le& \frac{2|\lambda_2|}{n} \int_t^s \tau^{-1} \||w(\tau)|^{\frac{2}{n}} - |w_+|^{\frac{2}{n}}\|_{L^\infty_x}\, d\tau
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

が従う．定理 2.1 より，或る $k' > 0$ と $l > 0$ に対して

$$
\||w(\tau)|^{\frac{2}{n}} - |w_+|^{\frac{2}{n}}\|_{L^\infty_x} \le C\varepsilon^l \tau^{-k'}
$$

が成り立つので，不等式 (3.5) より，

$$
\|(e^{\frac{2}{n}\Psi(s)} - K(s)) - (e^{\frac{2}{n}\Psi(t)} - K(t))\|_{L^\infty_x} \le C\varepsilon^l t^{-k'}
$$

が得られる．従って，$\{e^{\frac{2}{n}\Psi(t)} - K(t)\}_{t\ge 1}$ は $t \to \infty$ の時に L^∞ に於いて Cauchy 条件を満たし，$\psi_+ \in L^\infty$ が唯一つ存在して，

$$
\|e^{\frac{2}{n}\Psi(t)} - K(t) - \psi_+\|_{L^\infty_x} \le C\varepsilon^l t^{-k'}
$$

が成り立つ．この評価より，評価式 (2.1) が従う．不等式 (3.5) で $t = 1$ として，

$$
\|e^{\frac{2}{n}\Psi(s)} - K(s)\|_{L^\infty_x} \le \frac{2|\lambda_2|}{n} \int_1^s \tau^{-1} \||w(\tau)|^{\frac{2}{n}} - |w_+|^{\frac{2}{n}}\|_{L^\infty_x}\, d\tau
$$

が成り立ち，上と同様に

$$
\|e^{\frac{2}{n}\Psi(s)} - K(s)\|_{L^\infty_x} \le C\varepsilon^l
$$

が得られる．この不等式で $s \to \infty$ として，

$$
\|\psi_+\|_{L^\infty_x} \le C\varepsilon^l
$$

が得られる．従って，$\varepsilon > 0$ が十分小さければ，$\|\psi_+\|_{L^\infty_x} \le 1/2$ である．

次に，$e^{i\Phi(t)}$ の挙動 (2.2) を考える．定義より，Φ は w と Ψ を用いて

$$
\Phi(t) = \lambda_1 \int_1^t \frac{1}{s} |w(s)|^{\frac{2}{n}} e^{-\frac{2}{n}\Psi(s)}\, ds
$$

と表される．評価式 (2.1) の証明と同様の考え方で，定理 2.1 と評価式 (2.1) より，$\{\Phi(t) - S(t)\}_{t\ge 1}$ が $t \to \infty$ の時に L^∞ に於いて Cauchy 条件

を満たす事が示され，更に，$\phi_+ \in L^\infty$ が唯一つ存在して，或る $k'' > 0$ に対して，

$$\|\Phi(t) - S(t) - \phi_+\|_{L^\infty_x} \le Ct^{-k''}$$

が成り立つ事が分かる．これより，(2.2) が従う．

漸近公式 (2.3) は，定理 2.1 と評価式 (2.1) と (2.2) から従う．

最後に，減衰評価 (2.4) と (2.5) の証明について述べる．注意 2.1 で述べた様に，(2.3) より，漸近公式 (2.6) が従う．Lebesgue の収束定理より，

$$\lim_{t\to\infty} \|e^{-i\widetilde{S}(t,\cdot)}\widetilde{A}(t,\cdot)^{-n/2}\hat{u}_+\|_{L^2_x} = \lim_{t\to\infty} \|\widetilde{A}(t,\cdot)^{-n/2}\hat{u}_+\|_{L^2_x} = 0$$

が成立し，漸近公式 (2.6) より，

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{L^2_x} =&\|\mathcal{F}U(-t)u(t)\|_{L^2_x}\\ \le&\|\mathcal{F}U(-t)u(t) - e^{-i\widetilde{S}(t,\cdot)}\widetilde{A}(t,\cdot)^{-n/2}\hat{u}_+\|_{L^2_x}\\ &+ \|e^{-i\widetilde{S}(t,\cdot)}\widetilde{A}(t,\cdot)^{-n/2}\hat{u}_+\|_{L^2_x}\\ \longrightarrow& 0, \qquad (t \to \infty)\end{aligned}$$

が得られる．従って，(2.4) が成り立つ．発展作用素 $U(\cdot)$ の分解 (1.5) より，或る $\gamma > 0$ に対して，

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{L^\infty_x} \le& Ct^{-n/2}\|\mathcal{F}U(-t)u(t)\|_{L^\infty_x} + Ct^{-n/2-\gamma}\\ \le& Ct^{-n/2}\|\mathcal{F}U(-t)u(t) - e^{-i\widetilde{S}(t,\cdot)}\widetilde{A}(t,\cdot)^{-n/2}\hat{u}_+\|_{L^\infty_x}\\ &+ Ct^{-n/2}\|e^{-i\widetilde{S}(t,\cdot)}\widetilde{A}(t,\cdot)^{-n/2}\hat{u}_+\|_{L^\infty_x} + Ct^{-n/2-\gamma}\end{aligned}$$

が成立する．

$$\|e^{-i\widetilde{S}(t,\cdot)}\widetilde{A}(t,\cdot)^{-n/2}\hat{u}_+\|_{L^\infty_x} = \|\widetilde{A}(t,\cdot)^{-n/2}\hat{u}_+\|_{L^\infty_x} \le C(\log t)^{-n/2}$$

なので，(2.5) が成り立つ． □

参考文献

[1] J.E. Barab, *Nonexistence of asymptotically free solutions for nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Phys. **25** (1984), 3270–3273.

[2] R. Carles, *Geometric optics and long range scattering for one-dimensional nonlinear Schrödinger equations*, Comm. Math. Phys. **220** (2001), 41–67.

[3] J. Ginibre and T. Ozawa, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger and Hartree equations in space dimension* $n \geq 2$, Comm. Math. Phys. **151** (1993), 619–645.

[4] J. Ginibre and G. Velo, *Long range scattering and modified wave operators for some Hartree type equations* III, *Gevrey spaces and low dimensions*, J. Differential Equations **175** (2001), 415–501.

[5] N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Asymptotics for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations*, Amer. J. Math. **120** (1998), 369–389.

[6] N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Domain and range of the modified wave operators for Schrödinger equations with a critical nonlinearity*, Comm. Math. Phys. **267** (2006), 477–492.

[7] H. Lindblad and A. Soffer, *Scattering and small data completeness for the critical nonlinear Schrödinger equation*, Nonlinearity **19** (2006), 345–353.

[8] T. Ozawa, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Comm. Math. Phys. **139** (1991), 479–493.

[9] A. Shimomura, *Asymptotic behavior of solutions for Schrödinger equations with dissipative nonlinearities*, Comm. Partial Differential Equations **31** (2006), 1407–1423.